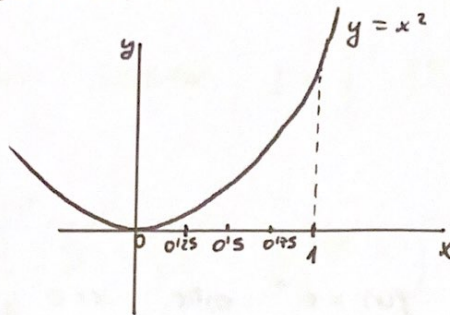


TEMA 3: Cálculo integral.

Ejemplo: Usar rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$ entre $x=0$ y $x=1$ y encima del eje x .

→ Solución:



$$\begin{cases} \text{Amplitud} = b - a = 1 - 0 = 1 \\ n^{\circ} \text{ rectángulo} = 4 \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ 1/4 = 0.25$$



Vista previa del documento.

Mostrando 6 páginas de 15

$$L_4 < \text{Área} < R_4$$

Ahora lo estimaremos para 8 subintervalos.

$$\left[0, \frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}\right], \left[\frac{2}{8}, \frac{3}{8}\right], \left[\frac{3}{8}, \frac{4}{8}\right], \left[\frac{4}{8}, \frac{5}{8}\right], \left[\frac{5}{8}, \frac{6}{8}\right], \left[\frac{6}{8}, \frac{7}{8}\right], \left[\frac{7}{8}, \frac{8}{8}\right]$$

$$L_8 = \frac{1}{8} \cdot 0^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \dots + \frac{1}{8} \left(\frac{7}{8}\right)^2 = 0.2734375$$

$$R_8 = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{2}{8}\right)^2 + \dots + \frac{1}{8} (1)^2 = 0.3984375$$

$$L_4 < L_8 < \dots < \text{Área} < \dots < R_8 < R_4$$

Definición:

$$\text{Área} = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$$

Denotación:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x) dx$$

Diagrama de un rectángulo con etiquetas: *subdiviso* (sobre b), *altura* (sobre $f(x)$), *base* (sobre dx), y *integral* (sobre el símbolo de integral).

Ejemplo.

Calcular el área bajo la gráfica de $f(x) = e^{-x}$ entre $x=0$ y $x=2$, y encima del eje x . Tomando 4 subintervalos, se pide estimar el área.



Vista previa
del documento.

Mostrando 6 páginas de 15

$[0, 0.5], [0.5, 1], [1, 1.5], [1.5, 2]$

$$L_4 = 0.5 \cdot e^{-0} + 0.5 \cdot e^{-0.5} + 0.5 \cdot e^{-1} + 0.5 \cdot e^{-1.5} = 1.098770131$$

$$R_4 = 0.5 \cdot e^{-0.5} + 0.5 \cdot e^{-1} + 0.5 \cdot e^{-1.5} + 0.5 \cdot e^{-2} = 0.666437$$

$$M_4 = 0.5 \cdot e^{-0.25} + 0.5 \cdot e^{-0.75} + 0.5 \cdot e^{-1.25} + 0.5 \cdot e^{-1.75} = 0.8557$$

Valor exacto: 0.864664 ; más próximo M_4

Regla de Barrow

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

→ siendo $F' = f$

Vamos a usar la
tabla de integrales
del aula: 1...9

Ejemplo: Calcular $I = \int_1^9 \frac{2t^2 + t^2 \sqrt{t} - 1}{t^2} dt$;

$$I = \int_1^9 \left(\frac{2t^2}{t^2} + \frac{t^2 \sqrt{t}}{t^2} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \int_1^9 \left(2 + \sqrt{t} - \frac{1}{t^2} \right) dt = \int_1^9 (2 + t^{1/2} - t^{-2}) dt =$$

$$\left[2t + \frac{2}{3} t^{3/2} + \frac{1}{t} \right]_1^9$$



Vista previa del documento.

Mostrando 6 páginas de 15

$$1. \int x^2 (x^3 + 2)^{1/3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 (x^3 + 2)^{1/3} dx = \frac{1}{3} \frac{(x^3 + 2)^{1/3 + 1}}{1/3 + 1} + C = \frac{1}{3} \frac{(x^3 + 2)^{4/3}}{4/3} + C =$$

$$\left. \begin{array}{l} - f(x) = x^3 + 2 ; f'(x) = 3x^2 \\ n = \frac{1}{3} \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} (x^3 + 2)^{4/3} + C = \boxed{\frac{1}{4} (x^3 + 2)^{4/3} + C}$$

2. Cambio de variable:

$$\left. \begin{array}{l} - x^3 + 2 = t^3 \\ 3x^2 \cdot dx = 3t^2 \cdot dt \\ \rightarrow dx = \frac{3t^2 \cdot dt}{3x^2} = \frac{t^2 dt}{x^2} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Sustituimos } \int \sqrt[3]{t^3} \cdot \frac{t^2 dt}{t^3} = \int t \cdot t^2 dt =$$

$$= \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C \left. \vphantom{\int} \right\} \begin{array}{l} \text{Sustituimos} \\ \text{Des hacemos el cambio} \end{array}$$

$$\frac{1}{4} t^4 + C = \boxed{\frac{1}{4} (\sqrt[3]{x^3+2})^4 + C}$$

Ej. 1 b)

$$\int \frac{x \cos x^2}{\sin x^2} dx ; \int \frac{x \cos^2 x}{u} \cdot \frac{du}{\cos x^2 \cdot 2x} = \int \frac{1}{2u} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du =$$

Cambio de variable:

$$u = \sin x^2$$

$$1 \cdot du = \underbrace{\cos x^2 \cdot 2x}_{\text{Otra forma:}} \cdot dx$$

$$\boxed{= \frac{1}{2} \ln |\sin x^2| + C}$$

c)



Vista previa del documento.

Mostrando 6 páginas de 15

Cambio de variable

$$x^3 + 2 = u$$

$$3x^2 dx = du$$

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$= -\frac{4}{3} \frac{1}{u^2} + C = -\frac{4}{3(x^3+2)^2} + C$$

Otra forma:

$$\int 8x^2 (x^3+2)^{-3} dx = \frac{8}{3} \int 3x^2 (x^3+2)^{-3} dx =$$

$$\boxed{f(x) = x^3+2 \rightarrow f'(x) = 3x^2}$$

$$n = -3$$

$$-\frac{2}{2} + C =$$

d)

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3+2}} dx = \int \frac{\cancel{x^2}}{\sqrt[4]{u}} \cdot \frac{du}{3\cancel{x^2}} = \int \frac{1}{3\sqrt[4]{u}} du =$$

Cambio de variable:

$$u = x^3 + 2$$

$$du = 3x^2 dx$$

$$dx = \frac{du}{3x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u^{1/4}} du = \frac{1}{3} \int u^{-1/4} du = \frac{1}{3} \frac{u^{3/4}}{3/4} + C = \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3} \right) u^{3/4} + C = \frac{4}{9} u^{3/4} + C = \boxed{\frac{4}{9} (x^3+2)^{3/4} + C}$$

Otra forma:

$$\int \frac{1}{(x^3+2)^{1/4}} dx$$



Vista previa
del documento.

Mostrando 6 páginas de 15

$$f) \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2}} = \int \frac{dx}{(x+1)^{2/3}} = \int (x+1)^{-2/3} dx$$

Ej. 3 Función racional es el cociente de dos polinomios.

$$a) \int \frac{dx}{x^2-4} = \int \frac{1}{x^2-4} dx$$

Polinomio del numerador = 1 $\rightarrow$ grado 0

Polinomio del denominador = $x^2-4 \rightarrow$ grado 2 $0 < 2$

Raíces del polinomio denominador:

$$x^2-4=0 \rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases} \text{ Raíces distintas}$$

"Descomposición
en fracciones
simples"

$$x^2-4 = (x-(-2)) \cdot (x-2) = (x+2)(x-2)$$

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - (-2)} + \frac{B}{x - 2}$$

Descomposición
en fracciones $\frac{A}{x+2}$, $\frac{B}{x-2}$
simples

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$$

$$\cancel{(x+2)} \cdot \frac{1}{\cancel{(x+2)}(x-2)} = \cancel{(x+2)} \frac{A}{\cancel{(x+2)}} + \cancel{(x-2)} \frac{B}{\cancel{(x-2)}}$$

$$\boxed{1 = A(x-2) + B(x+2)} \rightarrow \text{Objetivo: calcular } A \text{ y } B$$

Si $x = -2$

Si $x = +2$



Vista previa del documento.

Mostrando 6 páginas de 15

$$= -\frac{1}{4} \int \frac{1}{x+2} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-2} dx = \left[-\frac{1}{4} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|x-2| + C \right]$$

b) $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx$

Polinomio del numerador: $x+1 \rightarrow$ grado 1

Polinomio del denominador: $x^3+x^2-6x \rightarrow$ grado 3

$$1 < 3$$

Raíces del polinomio del denominador:

$$\left. \begin{array}{l} x^3+x^2-6x \rightarrow x_1=2 \\ \rightarrow x_2=-3 \\ \rightarrow x_3=0 \end{array} \right\} \text{ Raíces distintas}$$

$$x^3+x^2-6x = (x-2)(x+3)x$$