22/03/2023

* Ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Polinomio característico:

$$|xI-A| = \begin{vmatrix} x & -7 & -4 \\ -\frac{1}{4} & x & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & x \end{vmatrix} = x^3 - \frac{7}{4}x - \frac{3}{4}$$

2) Raíces:

$$C_A(x) = x^3 - \frac{7}{4}x - \frac{3}{4} \xrightarrow{\times 4} 4x^3 - 7x - 3 = 0$$

Raíces racionales $\frac{a}{b} \Rightarrow$ a divisor de $3 \Rightarrow a = \pm 1, \pm 3$; b divisor de $4 \Rightarrow b = \pm 1, \pm 2, \pm 4$

$\underbrace{m.c.d(a,b)=1}_{\text{Fracción reducida}}$

▸ -1 es ... polinomio

3) Divdiuna...

	1	0		
-1		-1	1	$+\frac{3}{4}$
	1	-1	$-\frac{3}{4}$	0

$$\Longrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 3/2 \\ -1/2 \end{cases}$$

4) $C_A(x) = x^3 - \frac{7}{4}x - \frac{3}{4} = (x+1)(x-\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2})$

5) $$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} \Longrightarrow D = P^{-1}\cdot A\cdot P \equiv A\cdot P = P\cdot D$$

$P = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$

$\vec{u}_1$: autovector asociado a $\lambda_1 = -1$

Calculamos los u_i:

$$\rightarrow (A - \lambda_i I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Planteamos el sistema general:

al sustituir las otras dos nos queda igualado a λ

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 7 & 4 \\ 1/4 & -\lambda & 0 \\ 0 & 3/4 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} -\lambda x + 7y + 4z = 0 \to z = t \\ \frac{1}{4}x - \lambda y = 0 \to x = 4\lambda y = \frac{16}{3}\lambda^2 z = \frac{16}{3}\lambda^2 t \\ \frac{3}{4}y - \lambda z = 0 \to y = \frac{4}{3}\lambda z = \frac{4}{3}\lambda t \end{cases}$$

Autovectores asociados a $\lambda = -1$:

$\{(\frac{16}{3}t, \frac{-4}{3}t, t), t \in \mathbb{R}\} = \text{Ker}(A+I)$

$u_1 = (16, -4, 3) \leftarrow t = 3$

Autovectores asociados a $\lambda = \frac{3}{2}$:

$\{(\frac{16}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot t, \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot t, t), t \in \mathbb{R}\} = \text{Ker}(A - \frac{3}{2}I)$

$u_2 = (12, 2, 1) \leftarrow t = 1$

Autovectores asociados a $\lambda = -\frac{1}{2}$:

$\{(\frac{16}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot t, \frac{4}{3} \cdot (\frac{-1}{2}) \cdot t, t), t \in \mathbb{R}\} = \text{Ker}(A + \frac{1}{2}I)$

$u_3 = ($

Planteamos

$P = \begin{pmatrix} 16 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

3/03/2023

Ejemplo

La matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ no es diagonalizable, ni sobre $\mathbb{R}$ ni sobre $\mathbb{C}$.

$|xI - B| = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ -2 & 5 & x-4 \end{vmatrix} = x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0$

$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$.

Para calcular los autovectores asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$, debemos resolver el sistema $(B - I)x = 0$. La matriz $B - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ tiene rango 2, luego el espacio de soluciones tiene dimesión 1, es decir, todos los autovectores asociados al autovalor 1 son proporcionales y no podemos por lo tanto encontrar dos de ellos linealmente independientes.

Haciendo cálculos tenemos: $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \end{array}$

1. Tiene un autovector asociado, $V_1 = (1,1,1) \longrightarrow M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Tiene un autovector asociado, $V_3 = (1,2,4) \longrightarrow M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

② $\underbrace{M \cdot \overset{\text{Vector propio generalizado}}{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}}}_{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \overset{(*)}{\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix}}}_{\text{Relación con los otros}}$

$\mathbb{R}^3 = Ker(M-I)^2 \oplus Ker(M-2I)$

$B = \{ \overset{\in Ker(M-I)}{(1,1,1)} = V_1 = (M-I)(V_2),\ \underset{Ker(M-I)^2 \setminus Ker(M-I)}{\underset{\cap}{V_2}} = (-2,-1,0),\ (1,2,4) = \underset{Ker(M-2I)}{\underset{\cap}{V_3}} \}$

$\rightarrow (M-I)\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in Ker(M-I)$

pasamos el vector (*)

$\rightarrow (M-I)^2\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

Tenemos la matriz $D = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$

Si no podemos diagonalizar una matriz usamos la matriz de Jordan:

$J = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} B_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & B_2 & & & \end{array}\right) \longrightarrow B_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_i & 1 \cdots \end{pmatrix}$

* Ejemplo:

Tenemos un

van desapareciendo haciendo potencias

Ejercicio Sea T el endomorfismo de $\mathbb{R}^6$ cuya matriz respecto de la base usual es A (la matriz del ejemplo anterior). ¿Cuál es la matriz del endomorfismo T respecto de la base $\mathcal{B}' = \underbrace{\{\mathbf{u}_{11}, \mathbf{u}_{22}, \mathbf{u}_{21}, \mathbf{u}_{33}, \mathbf{u}_{32}, \mathbf{u}_{31}, \}}_{\text{base del ejem. anterior}}$?

La matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 \\ -12 & -6 & 6 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$C_A(x) = (x+1)^6$$

$B = \{u_{11}, u_{21}, u_{22}, u_{31}, u_{32}, u_{33}\}$

$\boxed{A\cdot u_{11} = -u_{11}}$

$A\cdot u_{21} = -u_{21}$

$A\cdot u_{22} = u_{21} - u_{22}$

$A\cdot u_{31} = -u_{31}$

$A\cdot u_{32} = u_{31} - u_{32}$

$A\cdot u_{33} = u_{32} - u_{33}$

en el ejemplo

Si P es

$J = P^{-1}\cdot A\cdot P$

¿Matriz de A respecto de $B' = \{u_{11}, u_{22}, u_{21}, u_{33}, u_{32}, u_{31}\}$

$$J' = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} u_{11} \\ u_{22} \\ u_{21} \\ u_{33} \\ u_{32} \\ u_{31} \end{matrix} \end{array}$$